

# **Systèmes dynamiques, Dynamique Hamiltonienne , Chaos, Intégrabilité**

**Applications à des phénomènes non linéaires et aux  
problèmes à échelles de temps multiples. Introduction aux  
équations différentielles. Intégrabilité des systèmes**

**Contact : Alain Bourdier, E – mail : [alain.bourdier@gmail.com](mailto:alain.bourdier@gmail.com), Port. : 0610275548  
Site web : <https://sites.google.com/site/dynamiquehamiltonienne/>**

**Les cours auront lieu au laboratoire de Physique des gaz  
et des plasmas Faculté des Sciences d'Orsay Bât. 210 du  
12 au 16 Avril 2021**

**Ce sujet sera traité principalement par huit cours :**

# **1<sup>er</sup> cours : Cours de base sur les systèmes Dynamiques**

**Enseignant : Alain Bourdier (University of New Mexico)**

**Durée du cours : 4h**

Dans une partie introductive, je vais parler de mes deux activités de recherche principales : le chaos et la propagation d'un rayonnement laser dans l'atmosphère. Je montre le lien qui existe sur le plan expérimental (LIDAR à la Réunion) et celui que je cherche à créer sur le plan théorique en prenant en considération une éventuelle turbulence de l'atmosphère.

L'objectif de ce cours sera principalement de présenter les bases de la "Dynamique Hamiltonienne" et ses corollaires : intégrabilité, chaos déterministe, chauffage stochastique.

La "Dynamique Hamiltonienne" joue un rôle majeur en physique des plasmas et des faisceaux de particules. Elle peut être appliquée à l'étude de problèmes de physique complexes comme l'interaction laser matière à haut flux ou la propagation de faisceaux de particules chargées relativistes.

La dynamique Hamiltonienne constitue également une des bases de la mécanique quantique. Le schéma conceptuel utilisé par Schrödinger pour établir son équation repose sur une analogie formelle entre l'optique et la mécanique. Pour une particule massive non relativiste, l'équation de Hamilton-Jacobi pour la fonction caractéristique de Hamilton ressemble formellement à l'équation de l'eikonale (le principe variationnel associé étant le principe de moindre action).

Certaines présentations peuvent laisser penser que les formalismes Lagrangien et Hamiltonien ne sont que des changements de variables sans intérêt majeur pour la compréhension de la mécanique. Ce n'est pas le cas ; le formalisme Hamiltonien permet un changement de point de vue radical. Il découle, du formalisme énergétique introduit par Leibnitz et diffère complètement de celui de Newton.

La structure des équations de Hamilton fournit un outil très puissant; elle permet de trouver les invariants d'un système et ainsi de le réduire. On peut ainsi étudier l'intégrabilité d'un système et voir dans quelles situations le chaos peut s'installer.

Elle permet une introduction aux calculs de perturbation qui s'appliquent aussi bien en physique atomique et nucléaire qu'aux problèmes d'électromagnétisme. La "Dynamique Hamiltonienne" s'applique aussi aux domaines de l'astrophysique, par exemple, le problème de la stabilité du système solaire.

La Dynamique Hamiltonienne est un outil de référence pour étudier l'interaction champ particule. Une application à l'accélération par onde de sillage a été récemment étudiée. À des flux modérés (à des flux en dessous du seuil de wavebreaking) une onde seule crée un sillage en se propageant dans un plasma sans permettre le piégeage de particules. En provoquant de l'accélération stochastique à l'aide d'un laser contrepropagatif, on pré accélère des électrons qui sont ensuite piégés dans l'onde de sillage. On peut ainsi maîtriser l'accélération par onde de sillage.

Enfin, les mathématiques du chaos sont appliqués à l'exploitation de résultats expérimentaux. On suppose que nous ne disposons que d'une seule séquence de mesures effectuées à des moments différents. L'idée est de rechercher un déterminisme caché dans ces données expérimentales. Ici, les « résultats expérimentaux » sont donnés par une intégration numérique de l'attracteur étrange de Rössler. La reconstruction est testée. La méthode ainsi testée doit être appliquée à l'exploitation des actions LIDAR menées à l'Université de La Réunion.

Ce cours s'adresse préférentiellement aux ingénieurs chercheurs, doctorants et post doctorants, des différentes unités concernées par les domaines plasmas, lasers, faisceaux de particules... Elle a pour objet de familiariser les stagiaires avec le formalisme Hamiltonien (transformations canoniques, équation de Hamilton-Jacobi, méthodes de perturbation de type Bogoliubov-Mitropolsky, critère de Chirikov...). Enfin on montre comment ces mathématiques peuvent être utilisés en physique expérimentale.

## **2<sup>ème</sup> cours : La Dynamique Hamiltonienne. comme base de la mécanique quantique**

**Enseignant : Gilles Damamme (DAM/Direction Scientifique)**

*Durée du cours : 5h*

L'objectif de ce cours est de présenter les principaux points communs entre mécanique hamiltonienne et mécanique quantique et de les illustrer sur des exemples simples.

La Dynamique Hamiltonienne constitue une des bases de la mécanique quantique. Le schéma conceptuel utilisé par Schrödinger pour établir son équation repose sur une analogie formelle entre l'optique et la mécanique. Pour une particule massive non relativiste, l'équation de Hamilton-Jacobi pour la fonction caractéristique de Hamilton ressemble formellement à l'équation de l'eikonale (le principe variationnel associé étant le principe de moindre action),...

Historiquement la quantification a été introduite à partir des invariants adiabatiques de la mécanique quantique (problème élémentaire du pendule de longueur variable et quantification des énergies de l'oscillateur harmonique par exemple).

Les analogies de structure entre les deux mécaniques, hamiltonienne et quantique, méritent plus généralement d'être soulignées et développés, dont :

Crochets de Poisson et commutateurs de la M. Q.

Variables conjuguées, variables angle-action

Equations d'évolution dans les deux mécaniques

Grandeurs en involution (de la mécanique hamiltonienne) et opérateurs commutant (de la M. Q.)

Structure symplectique de la mécanique hamiltonienne et conséquence sur les schémas numériques

Action, trajectoire classique (extremum de l'action) et intégrale de chemin de la M. Q.

Invariants (intégrales premières) et théorème de Noether (symétrie du Lagrangien – invariance par groupe continu de transformation – recherche de ces transformations (équations de Killing ; identité de Rund-Trautmann)),

Méthodes de perturbation en dynamique hamiltonienne et en M.Q.

## **3<sup>ième</sup> cours : Méthodes non-perturbatives pour les équations différentielles**

**Enseignant : Robert Conte (LRC MESO, ENS Cachan CEA/DAM/DPTA)**

*Durée du cours : 5h*

**Contenu :** Ce cours est une introduction aux méthodes non-perturbatives permettant d'exhiber des solutions exactes d'équations différentielles en tous genres (ordinaires (EDO), aux dérivées partielles (EDP), aux différences finies) pourvu qu'elles soient non-linéaires. Nous nous limitons ici au cas des EDOs.

Méthodes utilisées : exploitation des singularités a priori des solutions (c'est-à-dire sans connaître ces solutions).

Méthode inutilisée (mais complémentaire) : les symétries de Lie.

Ci-dessous, résumé détaillé du cours projeté, qui s'inspirera fortement du livre [7].

1. Une mauvaise idée : perturber la partie linéaire
- 2 Cheminement naturel vers la propriété de Painlevé
- 3 Nécessité. Le test de Painlevé, un passage obligé
- 4 Suffisance. Intégration explicite
  - 4.1 Génération systématique des intégrales premières polynomiales
  - 4.2 EDOs autonomes d'ordre un
  - 4.3 EDOs d'ordre deux ou EDOs déjà "classées"
- 6 Exercices

## **4<sup>ième</sup> cours : Formulation hamiltonienne de l'électrodynamique classique**

**Enseignant : Frédéric André (Thales)**

*Durée du cours : 3h*

Dans cet exposé on s'attache à exprimer l'électrodynamique classique sous une forme hamiltonienne. Nous nous plaçons dans le cas le plus général où les particules rayonnent un champ électro-magnétique. Ce rayonnement se produit en raison du domaine dans lequel elles se meuvent (effet Tcherenkov) ou en raison de leur accélération (rayonnement synchrotron).

Cet exposé est donc une occasion de manipuler un hamiltonien général qui permet de résoudre des cas physiques réels sans commettre d'approximation. Nous prendrons l'exemple du tube à onde progressive (TOP). C'est un dispositif utilisé comme amplificateur d'onde électromagnétique. Outre son intérêt pratique il illustre le phénomène universel d'instabilité convective dans les plasmas. Nous verrons comment la formulation hamiltonienne permet de calculer numériquement les caractéristiques du dispositif.

Ce cours comporte donc une introduction sur l'intérêt de la formulation et les difficultés de son application à l'électrodynamique. Ensuite nous verrons comment trouver cette formulation pour l'électromagnétisme seul, puis pour des électrons couplés aux ondes. Enfin nous décrirons sa résolution numérique dans le cas du TOP.

## **5<sup>ème</sup> cours :** Dynamiques Complexes : Analyse des séries temporelles d'observation

**Enseignant : Olivier Delage (CNRS-Laboratoire de l'Atmosphère et des Cyclones (LACy)-UMR 8105)**

*Durée du cours : 5h30*

### Abstract:

L'atmosphère terrestre est un système complexe qui est défini en particulier par sa composition chimique qui n'a cessé d'évoluer depuis 4.6 milliards d'années, et fragile car il résulte d'un équilibre altérable entre ses sous-systèmes en interaction à différentes échelles de temps et d'espace. Dans ce contexte, un système physique est en général composé de plusieurs entités interagissant les unes avec les autres. Ainsi, la superposition des interactions des différentes entités d'un même système avec leur comportement individuel crée une complexité qui rend l'évolution du système global à la fois difficile à caractériser et à prédire. L'étude dynamique d'un système physique se fait à partir de ses propriétés globales et à partir de l'analyse de séries temporelles d'observation. La méthodologie utilisée regroupe deux grands axes de R&D complémentaires, suivant que l'on considère la série temporelle d'observations soit comme une séquence de mesures, soit du point de vue de la dynamique qu'elle est censée représenter.

Le premier de ces axes de R&D consiste à analyser la variabilité d'une série temporelle d'observation. Du fait de la nature complexe de l'atmosphère, une série temporelle d'observation comporte des fluctuations à toutes les échelles de temps et de ce fait revêt des caractéristiques de non-linéarité et de non-stationnarité. La méthode d'analyse correspondante consiste à décomposer la série temporelle dans l'espace-temps-fréquences et à extraire les principaux modes de variabilité contribuant significativement à la variabilité globale de la série originale.

Le deuxième axe R&D est focalisé sur la caractérisation et la modélisation de la dynamique sous-jacente à une série temporelle. Un résultat très puissant issu de la dynamique des systèmes non-linéaires stipule qu'il est possible à partir d'une série temporelle d'observations de reconstruire la dynamique sous-jacente dans l'espace des états sous la forme d'une trajectoire équivalente à une trajectoire du système original. La méthodologie associée se base sur une approche de modélisation globale. Une telle approche permet d'extraire les équations caractéristiques des lois qui gouvernent le comportement global d'un système directement à partir de séries temporelles d'observations. Un important travail de réflexion relatif à cette approche a déjà été initié au CESBIO (Centre d'EtudeS de la BIOSphère) à Toulouse et au département de physique de l'Université de Rouen et les résultats obtenus sur des séries temporelles d'observation liées à la biodiversité sont prometteurs.

Dans le cadre du premier axe R&D, plusieurs techniques de décomposition adaptatives telles que la décomposition modale empirique (EMD), la transformation en ondelettes adaptatives (EWT), la décomposition empirique en ondelettes adaptatives seront présentées ainsi que les résultats obtenus sur plusieurs types de série temporelles d'observation (concentration d'ozone, pluviométrie, mouvement des barrières climatiques). Pour caractériser la dynamique sous-jacente à une série temporelle d'observation, on a recours à l'espace des phases ou espace des états qui

est un espace abstrait permettant de représenter un comportement dynamique par une trajectoire géométrique constituée par les états successivement visités par le système. On présentera les différentes techniques permettant de reconstruire la dynamique sous-jacente à une série temporelle, on présentera le théorème de Takens et ses implications dans cette reconstruction. On abordera de même la notion d'invariants non-linéaire qui permettent de caractériser une dynamique indépendamment de ses conditions Initiales. Le thème principal du deuxième axe R&D réside dans le développement d'une approche de Modélisation Globale et fait l'objet du projet CNRS-LEFE-MANU **SOLSTYCE** (Caractérisation et Modélisation de la dynamique des **S**éries **T**emporelles d'observation issues des **s**ystèmes **C**omplexes en sciences de l'atmosphère ) initié en Février 2020. L'approche de **la** Modélisation Globale n'ayant pas encore été exploitée dans un contexte Océan-Atmosphère réaliste, un objectif spécifique de SOLSTYCE est de redéfinir le cadre mathématique de cette nouvelle technique de modélisation de manière à ce qu'elle puisse être appliquée aux sciences de l'atmosphère. On présentera les objectifs et les perspectives du projet SOLSTYCE et on montrera comment les deux axes R&D évoqués plus haut sont complémentaires l'un de l'autre et notamment comment le premier axe R&D constitue une initialisation de la Modélisation Globale en réduisant la dimensionnalité du système étudié.



## **6<sup>ième</sup> COURS : Chaos Hamiltonien du Système Electron-Ion en Plasma Arbitrairement Magnétisé**

**Enseignant : Claude Deutsch (CNRS, LPGP UParis-Sud, 91405-Orsay)**

*Durée du cours : 5h*

Se fixant comme objectif l'étude du ralentissement de particules chargées en régime non relativiste par les états liés et hydrogenoides du couple électron-ion en plasma extrêmement magnétisé ( $B > 10^9 \text{G}$ ), on rappelle les caractéristiques chaotiques de la distribution d'états excités correspondante, i.e. lorsque la symétrie sphérique habituelle est brisée et que ne subsiste essentiellement comme règle de classification que la conservation de la parité. Le chaos hamiltonien résulte alors naturellement de la quasi égalité de l'attraction coulombienne électron-ion, éventuellement Debye modifiée et du terme diamagnétique provenant du champ magnétique appliqué. Le terme linéaire de l'effet Zeeman usuel est alors implicitement retenu dans le  $H_0$  non perturbé.

A cet effet, on essaiera de comparer les approches quantiques habituelles, mais adaptées à une symétrie cylindrique, à une approche résolument classique, initiée de la limite  $\hbar \rightarrow 0$ , basée sur la condition de quantification Einstein-Brillouin-Keller (EBK), faisant usage de tores concentriques et imbriqués dans l'espace des phases qui garde alors une signification dépourvue d'ambiguïté, ce qui n'est pas le cas pour l'approche quantique.

## **7<sup>ème</sup> COURS : Interaction ondes-particules en régime non linéaire**

**Enseignant : Didier Bénisti (CEA/DIF/DPTA)**

**Durée du cours : 4h30**

L'interaction ondes-particules est, généralement, un problème auto-cohérent : les ondes modifient la trajectoire des particules ce qui, en retour, affecte leur propagation. Le but de ce cours est de montrer en quoi les formalismes découlant du principe de moindre action peuvent fortement aider à la résolution de ce problème. En particulier, on décrira le formalisme Lagrangien développé par Whitham pour décrire la propagation des ondes et, de manière plus détaillée, le formalisme Hamiltonien appliqué au calcul de la dynamique non linéaire de particules chargées.

Le grand intérêt de passer par le formalisme Hamiltonien est de disposer d'une boîte d'outils très puissants, parmi lesquels figurent en bonne place le théorème adiabatique, ainsi que les théories de perturbation, que nous introduirons en discutant leur sens physique, ainsi que leurs limitations, et que nous appliquerons aux problèmes suivants, par ordre croissant de complexité :

1. L'accélération ionique à l'aide d'ondes radio-fréquence, ce qui peut être appliqué à la propulsion spatiale ainsi qu'à la génération de courant et le chauffage additionnel des tokamaks. Au travers de cette problématique nous introduirons les théories de perturbation comme théorie de moyennisation, en faisant ressortir le rôle particulier des sécularités. Nous aborderons aussi, rapidement, le théorème KAM et son corollaire, le théorème de Nekhoroshev.
2. La théorie quasilineaire en physique des plasmas, ce qui nous permettra de montrer comment appliquer une théorie de perturbation à un système dynamique qui est très loin d'être intégrable. Traiter la théorie quasilineaire nous permettra aussi d'aborder le transport chaotique, et de montrer comment établir un lien entre la mécanique rationnelle et la physique statistique en discutant la validité de l'équation de diffusion pour modéliser un système déterministe.
3. La propagation non linéaire d'une onde électrostatique dans un plasma de fusion. Cette problématique est de loin la plus complexe, et mêle l'utilisation du principe variationnel de Whitham, pour décrire la propagation des ondes, aux théories adiabatiques et perturbatives. Elle permet d'introduire certaines notions clef de la physique des plasmas, telles que la dissipation non collisionnelle (en particulier l'amortissement Landau et ses équivalents non linéaires), qui a eu un large retentissement dans diverses communautés scientifiques, et, notamment en mathématiques. L'application de cette étude à l'estimation de la rétrodiffusion Raman dans une installation telle que le Laser MégaJoule sera aussi abordée.

**8<sup>ème</sup> COURS : Physique sans temps**

**Enseignant : J.P. Ebran (CEA/DIF/DPTA)**

***Durée du cours : 3h***

La physique moderne a bouleversé notre compréhension de l'espace et du temps. Des primats permettant d'appréhender le mouvement et le changement, ils sont aujourd'hui entendus comme langages commodes exprimant les relations qu'entretiennent les objets dynamiques ainsi que le changement dans ces relations.

Cette évolution de point de vue nous invite à une reformulation de la mécanique abandonnant la notion de temps, pré requis pour concevoir une théorie quantique de la gravitation. Ce cours abordera une formulation covariante de la mécanique au cœur de laquelle interviennent deux objets fondamentaux : la fonction de Hamilton (à ne pas confondre avec le Hamiltonien) pour la théorie classique et l'amplitude de transition pour la version quantique.